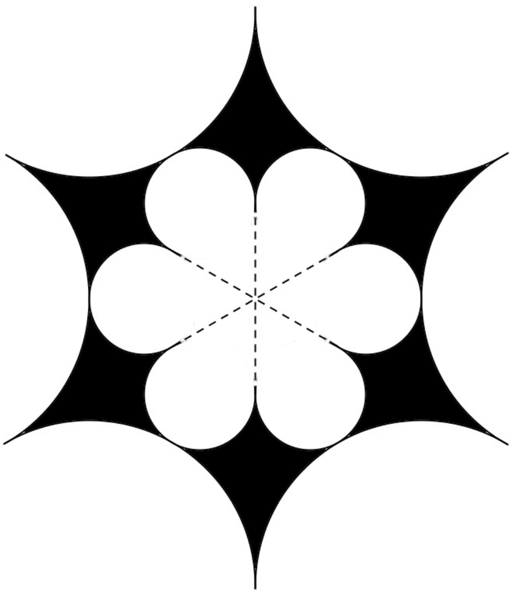
Sujets nationaux des Olympiades 2010

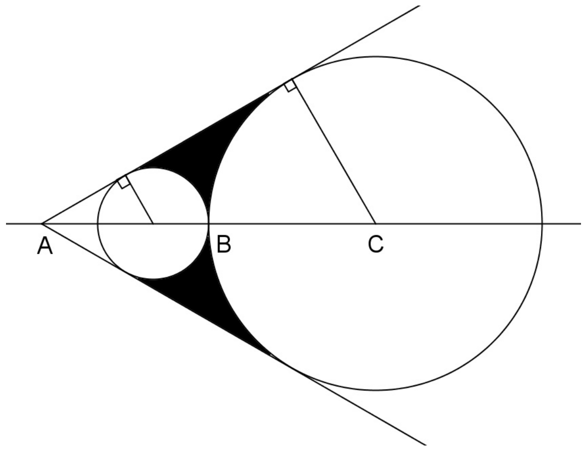
<u>Exercice National 1</u> : *La Rosace.*

Un architecte cherche à intégrer une rosace particulière dans le bâtiment dont il étudie actuellement les plans. Voici son idée : la rosace a été tracée à partir du motif ci-dessous construit à l'aide de deux cercles.

Rosace



Motif :



a) Dans le motif ci-dessus, quelle est la mesure de l'angle formé par les tangentes aux cercles issues de A ?

b) i - Montrer que $AB = BC$.
ii - Comment le rayon du plus grand des deux cercles s'exprime-t-il en fonction du rayon du plus petit des deux cercles ?
iii - D'après ses plans, l'architecte souhaite inscrire sa rosace dans un disque de rayon $3\sqrt{3}$.
Comment doit-il alors choisir le rayon de chacun des cercles du motif ?

c) On suppose que le petit cercle a un diamètre égal à une unité. Quelle est l'aire de la partie colorée de la rosace ?

<u>Eléments de correction (proposés par l'académie d'Amiens) :</u>

1) On constate que le motif se retrouve 6 fois dans la rosace. Donc l'angle vaut 60°.
2) a) <u>Première méthode :</u>
Notons D le sommet tel que ACD soit rectangle en D.
La droite (AC) étant une bissectrice, on a donc $\widehat{CAD} = 30°$ Donc $\widehat{BCD} = 60°$.
Et puisque $BC = DC$, le triangle BCD est donc équilatéral.

Ensuite, $\widehat{BDA} = 30°$, donc le triangle ABD est isocèle en B, d'où $BD = BA$

Finalement, on trouve bien $\mathrm{AB} = \mathrm{BC}$.
<u>Deuxième méthode :</u>
On note R le rayon du grand cercle.

On applique une formule de trigonométrie : $\sin\widehat{\mathrm{DAC}} = \dfrac{\mathrm{DC}}{\mathrm{AC}}$, d'où $\sin 30° = \dfrac{R}{\mathrm{AC}}$.

Puisque $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$, on obtient $\mathrm{AC} = 2R$.

Or $\mathrm{BC} = R$, d'où $\mathrm{AB} = R$. Finalement $\mathrm{AB} = \mathrm{BC}$.

b) Notons E le centre du petit cercle et r le rayon de ce cercle.
En appliquant le résultat précédent, il vient que $\mathrm{AE} = 2r$. De plus, $\mathrm{EB} = r$.
On obtient donc $\mathrm{AB} = 3r$, c'est-à-dire $R = 3r$.

3) On doit avoir $\mathrm{AD} = 3\sqrt{3}$, c'est-à-dire $\sqrt{(2R)^2 - R^2} = 3\sqrt{3}$, d'où $R = 3$. Puis $r = 1$.

4) Si $r = \dfrac{1}{2}$, alors l'autre côté du petit triangle vaut $r\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc l'aire du petit triangle est $\dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

D'autre part, on a : $R = 3r = \dfrac{3}{2}$, et l'autre côté du grand triangle vaut $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, donc l'aire du grand triangle vaut $\dfrac{9\sqrt{3}}{8}$.

La partie noire à l'intérieur du triangle ACD s'obtient en retranchant au grand triangle le petit, le secteur $\widehat{\mathrm{BEF}}$ (où F est le point tel que AEF est rectangle en F), et le secteur $\widehat{\mathrm{BCD}}$.

Cette surface vaut donc $\dfrac{9\sqrt{3}}{8} - \dfrac{\sqrt{3}}{8} - \dfrac{\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{3} - \dfrac{\pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^2}{6} = \sqrt{3} - \dfrac{11\pi}{24}$.

Il reste à multiplier par 12 pour obtenir l'aire totale : $12\sqrt{3} - \dfrac{11\pi}{2}$.

Exercice National 2 : ***A la recherche du « chaînonze ».***

On rappelle le critère de divisibilité par 11 d'un nombre inférieur à 999 :
« Un nombre inférieur à 999 est divisible par 11 si et seulement si la somme du chiffre des centaines et des unités moins le chiffre des dizaines vaut 0 ou 11».
Ainsi 759 et 99 sont divisibles par 11 car 7 + 9 – 5 = 11 et 0 + 9 – 9 = 0.

On appelle **chaînonze** une chaîne de chiffres telle que tout nombre formé de trois termes consécutifs de la chaîne est divisible par onze.
Par exemple « 7 5 9 4 » est un chaînonze car 759 et 594 sont divisibles par 11.

1. Quel chiffre peut-on ajouter **à droite** de la chaîne « 7 5 9 4 » pour la prolonger en un chaînonze ?

2. Prolonger par la droite le chaînonze « 7 5 9 4 » en un chaînonze de 12 chiffres.
   Peut-on le prolonger ainsi indéfiniment ? Quel serait alors le 2010^{e} chiffre ?

On envisage de partir d'une chaîne de deux chiffres et de la prolonger par la droite en un chaînonze le plus long possible.

3. Prolonger par la droite les chaînes « 0 9 » et « 9 1 ». Que constatez-vous?

On appelle ***chaînonze fini*** un chaînonze qui au bout d'un nombre fini d'opérations ne peut plus se prolonger.
On appelle ***chaînonze n-périodique*** un chaînonze infini constitué d'une séquence de *n* chiffres se répétant indéfiniment.

4. On considère la chaîne « *a b* » où *a* et *b* sont deux chiffres. On veut savoir si cette chaîne est prolongeable en un chaînonze de **trois** chiffres et, auquel cas, si un tel prolongement est unique.

   a. Etudier le cas particulier « *a a* ».

   b. Etudier le cas *b*= *a*-*1*.

   c. Etudier les autres cas.

5. Montrer qu'en prolongeant la chaîne « *a b* » autant que faire se peut, le chaînonze obtenu est soit fini, soit 6-périodique.

Eléments de correction (proposés par l'académie de Nancy-Metz)

1. Si *x* est le chiffre à ajouter à droite de la chaîne, on a que deux possibilités : 9 + *x* – 4 = 0 ou 9 + *x* – 4 = 11 et seule la deuxième équation donne une solution acceptable, qui est 6, puisqu'un chiffre est un entier positif compris entre 0 et 9.
   D'où la chaîne peut-être prolongée en : « 7 5 9 4 6 ».

2. Si on continue on obtient le chaînonze « 7 5 9 4 6 2 7 5 9 4 6 2 … ». La chaîne « 7 5 9 4 6 2 » se répète constamment. On sait 2010 divisible par 6, donc le 2010^{e} terme est 2.

3. Pour « 0 9 » on obtient « 0 9 9 0 2 2 0 9 9 0 2 2 0 9 ». La chaîne « 0 9 9 0 2 2 » se répète constamment. Pour « 9 1 » on obtient « 9 1 3 2 » et le chaînonze est « bloqué » car les équations $3+x-2=0$ et $3+x-2=11$ admettent comme solutions – 1 et 10 qui ne sont pas des chiffres.
4. On trouve :
   a. Si *b*=*a*, le prolongement est « *a b* 0 ».

a. Si $b=a-1$, c'est impossible car les équations $a + x - b = 0$ et $a + x - b = 11$ donnent $x = -1$ et $x = 11-(a - b) = 10$ qui ne sont pas des chiffres.

b. Si $b < a-1$, on a le chaînonze « a b $(11-a+b)$ » avec $(11 - a + b)$ qui est bien un chiffre car si a et b sont deux chiffres où $b < a-1$, on a $-10 < b - a < -1$ d'où $1 < 11 - a + b < 10$.

c. Si $a < b$, « a b $(b - a)$ » avec $b - a$ est bien un chiffre car $0 < b - a < 10$.

Dans tous les cas, le prolongement est soit impossible (cas $b = a - 1$) soit unique.

2. **1^er^ cas : si $a = b$**

Si $a = b = 0$, on obtient « 0 0 0 0 ... » le chaînonze est 1-périodique donc a fortiori 6-périodique.
Si $a = b = 1$, on obtient « 1 1 0 » et le chaînonze est fini de longueur 3.
Si $a = b$ avec $a > 1$, on obtient « a a 0 $(11 - a)$ $(11 - a)$ 0 a a ... » le chaînonze est 6-périodique sans blocage.

2^e^ cas : $a = b + 1$

la chaîne se bloque et est de longueur 2.

3^e^ cas : $a = 0$ et $b = 1$

« 0 1 1 0 » est le prolongement en un chaînonze de longueur 4.

4^e^ cas : $0 < a < b$,

« a b $(b - a)$ $(11 - a)$ $(11 - b)$ $(11 + a - b)$ a b » est le prolongement en un chaînonze 6-périodique ou se bloque d'après la question précédente si

- $b - a = b - 1$, c'est-à-dire $a = 1$ et la chaîne est de longueur 3,
- $11 - b = 11 - a - 1$, c'est-à-dire $b = a + 1$ et la chaîne est de longueur 5.

5^e^ cas : Si $b = 0$ et $a > 1$

le prolongement est « a 0 $(11 - a)$ $(11 - a)$ 0 a » et le chaînonze est infini.

6^e^ cas : Si $a > b + 1 > 1$

« a b $(11 - a + b)$ $(11 - a)$ $(11 - b)$ $(a - b)$ a b » le chaînonze est 6-périodique ou se bloque si $11 - a = 11 - a + b - 1$, c'est-à-dire $b = 1$ et la chaîne est de longueur 4.

On résume tous les cas dans un tableau dans lequel figure 33 cas de blocage et 67 cas fournissant des chaînonzes infinis et 6 périodiques résumés dans le tableau ci-dessous.

a \ b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		4								
1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2		2		5						
3		4	2		5					
4		4		2		5				
5		4			2		5			
6		4				2		5		
7		4					2		5	
8		4						2		5
9		4							2	

Autre solution : considérons un chaînonze infini et prouvons qu'il est nécessairement 6 périodique. Ainsi un chainonze sera soit fini, soit infini et 6 périodique.
Considérons une séquence de ce chaînonze de longueur 7 notée $a\ b\ c\ d\ e\ f\ g$.
Alors $a + c - b$ est divisible par 11 ; de même $b + d - c$ est divisible par 11 ; … ; $e + g - f$ est divisible par 11.
On en déduit que $(a + c - b) + (b + d - c) = a + d$ est divisible par 11 ; de même $d + g$ est divisible par 11 et par soustraction, $a - g$ est divisible par 11. Donc $a = g$ car a et g sont des entiers compris entre 0 et 9.